

## Examen

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée  
durée 1h30

La clarté et la lisibilité de vos réponses seront prises en compte dans l'évaluation.

### Exercice 1 - Algorithme de Glushkov

En utilisant l'algorithme de Glushkov, représenter un automate acceptant les mots décrits par l'expression  $a(ab + bb)^*b$ .

### Exercice 2 - Comparaison de deux langages

Soit les deux automates  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  donnés par  $\mathcal{A}_i = (A, Q_i, I_i, F_i, \delta_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $A = \{a, b\}$ ,

- $Q_1 = \{r_0, \dots, r_7\}$ ,  $I_1 = r_0$ ,  $F_1 = r_6$ ,  $\delta_1 = \{(r_0, b, r_1), (r_0, a, r_7), (r_1, b, r_2), (r_1, a, r_6), (r_2, b, r_3), (r_2, a, r_5), (r_3, b, r_1), (r_3, a, r_5), (r_4, b, r_0), (r_4, a, r_7), (r_5, a, r_4), (r_5, b, r_6), (r_6, b, r_6), (r_6, a, r_4), (r_7, b, r_6), (r_7, b, r_4)\}$ ,
- $Q_2 = \{q_0, \dots, q_4\}$ ,  $I_2 = q_0$ ,  $F_2 = q_2$ ,  $\delta_2 = \{(q_0, a, q_1), (q_0, b, q_4), (q_1, a, q_3), (q_1, b, q_4), (q_2, a, q_3), (q_2, b, q_2), (q_3, a, q_1), (q_3, b, q_0), (q_4, b, q_3), (q_4, a, q_2)\}$ .

1. Représenter les automates  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sous la forme de graphes orientés étiquetés.
2. Est-ce que l'identité  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$  est vraie ? Donner une preuve pour votre réponse.

### Exercice 3 - Rationalité

Soit l'alphabet  $A = \{a\}$ . Sur cet alphabet, on considère le langage  $L = \{a^{n^2} | n \in \mathbb{N}\}$ . Le langage  $L$  est-il rationnel ? Donner une preuve pour votre réponse.

### Exercice 4 - Grammaire algébrique

Donner une grammaire algébrique qui engendre le langage  $\{a^m b^n c^p | n = m + p, n \geq 0\}$ .

### Exercice 5 - Combinatoire - suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est donnée par la relation de récurrence  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , où  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$ . Prouver les identités :

- $\sum_{0 \leq i < n} F_{2i+1} = F_{2n}$ ,
- $1 + \sum_{0 \leq i < n} F_{2i} = F_{2n-1}$

pour tout  $n$  entier positif.