Université Bordeaux - Collège Sciences et technologies
Année universitaire 2022/2023, session 1 d'automne
Modèles de la Programmation et du Calcul, UE 4TIN512U

14 décembre 2022, 9h00-10h30

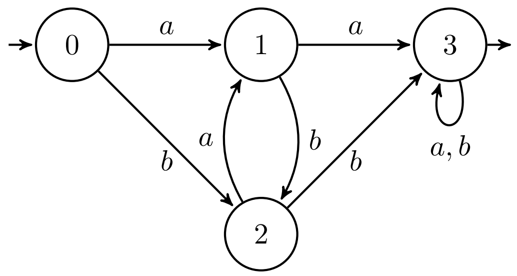
— Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto-verso.
— La clarté et la lisibilité de vos réponses seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1:

Dans cet exercice vous devez déterminer si l'expression rationnelle E et l'automate $\mathcal{A}$ ci-dessous acceptent le même langage :

$$E = \ (a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$$

$\mathcal{A}$



(a) Donnez un automate non-déterministe $\mathcal{B}$ à 4 états qui accepte le langage de l'expression E. Votre automate $\mathcal{B}$ peut être complet ou pas, et les seuls cycles seront des boucles sur les états. On ne demande pas la construction de Glushkov.

(b) Justifiez à l'aide du lemme d'Arden que votre automate $\mathcal{B}$ accepte le langage de l'expression E.

(c) Déterminisez l'automate $\mathcal{B}$ et dessinez l'automate qui en résulte.

(d) Justifiez que l'automate $\mathcal{A}$ est minimal.

(e) Déterminez si E et $\mathcal{A}$ acceptent le même langage. Justifiez bien votre réponse.

Exercice 2:

(a) Soit $L_1 \subseteq \{a, b\}^*$ le langage des mots dont le nombre de a est égal au nombre de b plus 1 :

$$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b + 1\}$$

Montrez que L_1 n'est pas régulier. Justifiez bien votre réponse.

(b) Soit $L_2 \subseteq \{a, b\}^*$ le langage des mots w de L_1 tels que tout préfixe v de w satisfait : $|v|_a \geq |v|_b$:

$$L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b{+}1 \text{ et pour tout préfixe } v \text{ de } w : |v|_a \geq |v|_b\}$$

Exemples : $aba, aab \in L_2$ mais $baa \notin L_2$ (à cause du préfixe b) et $aaa \notin L_2$ (parce que $aaa \notin L_1$).

On considère la grammaire hors-contexte $G = (\{S, X\}, \{a, b\}, R, S)$ avec règles suivantes :

$$S \longrightarrow XS \mid aX$$
$$X \longrightarrow XX \mid aXb \mid \epsilon$$

(i) Montrez que tous les mots générés par la variable X ont autant de a que de b.
Indication : récurrence sur la longueur n d'une dérivation $X \xrightarrow{n} z$ où $z \in \{X, a, b\}^*$.

(ii) Pour cette question vous pouvez supposer que tous les préfixes des mots générés par X ont au moins autant de a que de b.

Montrez que $L(G) \subseteq L_2$.

(iii) (Bonus) Justifiez l'inclusion $L_2 \subseteq L(G)$.

<u>Rappel :</u> la contre-posée du lemme de pompage pour les langages réguliers.

> Pour tout $N > 0$ il existe un mot $x \in L$ de longueur au moins N et tel que pour toute décomposition $x = uvw$ avec $v \neq \epsilon$ et $|uv| < N$: il existe un $k \geq 0$ tel que $u\,v^k\,w \notin L$.