TD 1 - Expressions rationnelles et automates finis

Licence 3 - Université Bordeaux

Dans tout le cours, les expressions construites à partir des lettres en utilisant les opérateurs $\cdot$ pour la concaténation, * pour l'étoile et $+$ pour l'union sont appelées indifféremment :

— expressions rationnelles, ou
— expressions régulières.

Exercice 1: Langage décrit par une expression régulière

1. Donner tous les mots de longueurs 0, 1, 2, 3, et 4 des langages décrits par les expressions régulières suivantes :
   (a) $(a + ba)^*$
   (b) $a(aa + b(ab)^*a)^*a$
2. Soit L un langage dont tous les mots sont de longueur paire. Montrer que tous les mots de L^* sont aussi de longueur paire. En déduire que tous les mots de $L(a(aa + b(ab)^*a)^*a)$ sont de longueur paire.
3. Vrai ou faux ? le langage décrit par $(a+ba)^*$ consiste de tous les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui ne contiennent pas le facteur bb.
   Justifiez votre réponse.

Exercice 2: Expression régulière d'un langage

Sur l'alphabet $\{a, b\}$, donner une expression régulière pour

1. le langage des mots tels que toutes les (éventuelles) occurrences de a se trouvent avant toutes les (éventuelles) occurrences de b.
2. le langage des mots qui ont un nombre pair de a.
3. le langage des mots qui ont toujours un nombre pair de b entre chaque deux occurrences de la lettre a.
   Exemples : $babb, baabbabbb, bbb$ appartiennent au langage, mais $aba, aabbbabb$ n'appartiennent pas.
4. le langage des mots finissant par ba.

5. le langage des mots qui ne contiennent pas le facteur aa.
   Exemples : a, bba, bab appartiennent au langage, $aa, babaa$ n'appartiennent pas.

Exercice 3: Quelques identités sur les langages
Soient K et L deux langages et

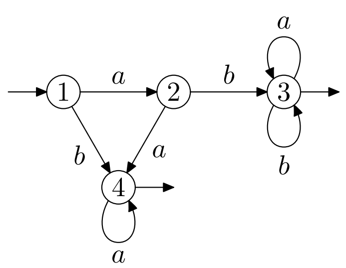
$$L^+ = \bigcup_{i \geqslant 1} L^i = L \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots$$

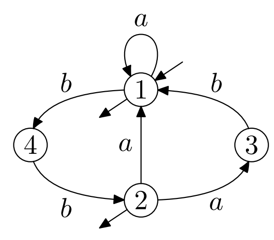
Les identités suivantes sont-elles toujours correctes ?

1. $L^+ = LL^*$
2. $LL^* = L^* \setminus \{\epsilon\}$
3. $L^* = \epsilon + LL^*$
4. $(KL)^*K = K(LK)^*$

Justifier vos réponses, soit en montrant les égalités ou en donnant des contre-exemples.

Exercice 4: Langage reconnu par un automate
Donner tous les mots de longueurs 0, 1, 2, 3 acceptés par les automates suivants :





Exercice 5: Quelques exemples d'automates
Donner, si possible, un automate et une expression régulière pour les langages suivants construits sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$.

1. tous les mots
2. tous les mots excepté le mot vide

3. tous les mots sans b
4. tous les mots contenant au plus une occurrence de la lettre a
5. tous les mots contenant au moins une occurrence de la lettre a
6. tous les mots dans lesquels chaque a est suivi d'un b
7. tous les mots de longueur paire
8. tous les mots avec préfixe ab
9. tous les mots qui finissent par a
10. tous les mots qui contiennent la lettre c et le facteur ab
11. tous les mots qui contiennent la lettre c mais ne contiennent pas le facteur ab
12. pour un mot fixé w, le langage $\{w\}$
    (*Indication :* essayez avec des exemples concrets pour w.)

Démontrer que les automates donnés reconnaissent bien ces langages et que les expressions régulières les décrivent bien.

Exercice 6: Exercice plus difficile

Étant donné un alphabet $A = \{a, b\}$ construire un automate déterministe à 4 états qui accepte le langage A^*aba.

Indication : on appellera les états $q_\epsilon, q_a, q_{ab}, q_{aba}$ et on définira les transitions de telle façon que les mots qui arrivent dans l'état q_u sont exactement ceux qui ont le mot u en tant que suffixe de aba de longueur maximale.