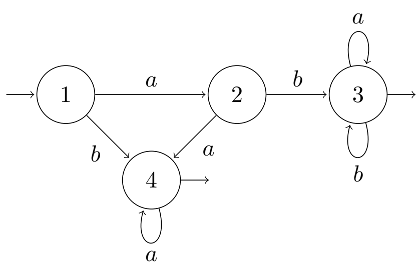
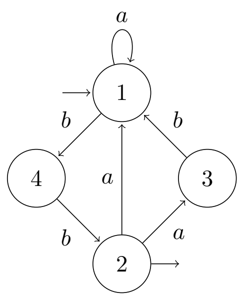
TD 2 - Automates finis

Licence 3 - Université Bordeaux

Exercice 1: De l'automate à la définition mathématique

Donnez la définition mathématique des automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ suivants.





Exercice 2: De la définition mathématique à l'automate

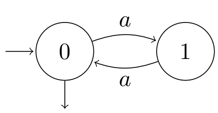
Pour chacune des deux définitions mathématiques suivantes, dessiner l'automate qui les représente. Dans les deux cas, l'alphabet est $A = \{a, b, c\}$.

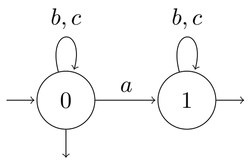
$$\mathcal{A}_3 = \left(A,\ Q = \{1,2,3\},\ I = \{1\},\ F = \{2,3\},\ \delta = \left\{ \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{a} 2,\ 1 \xrightarrow{b} 2, \\ 2 \xrightarrow{c} 2,\ 2 \xrightarrow{a} 3, \\ 3 \xrightarrow{b} 1 \end{array} \right\} \right)$$

$$\mathcal{A}_4 = \left(A,\ Q = \{1,2,3\},\ I = \{2\},\ F = \{2\},\ \delta = \left\{ \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{a} 1,\ 1 \xrightarrow{b} 2, \\ 3 \xrightarrow{a} 3,\ 2 \xrightarrow{b} 1 \end{array} \right\} \right)$$

Exercice 3:

1. Pour chacun des automates des deux exercices précédents, et pour les deux automates $\mathcal{A}_5$ et $\mathcal{A}_6$ ci-dessous répondez aux questions suivantes :

$\mathcal{A}_5 =$ 

$\mathcal{A}_6 =$ 

(a) Est-il complet ? Si oui, justifez-le, sinon, complétez-le.

(b) Est-il déterministe ? Justifiez votre réponse.

(c) Quels sont les plus courts mots acceptés ? Donner un calcul acceptant pour chacun de ces mots.

2. Dans les exercices précédents, trouvez un automate $\mathcal{A}$ et un mot w, tels qu'il existe deux chemins pour w dans $\mathcal{A}$, l'un finissant dans un état final et l'autre dans un état non final.
3. Pour chacun des automates $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$ et $\mathcal{A}_6$, dessiner un automate qui reconnait le language complémentaire.

Exercice 4:
Soit A un alphabet. Les propriétés suivantes sont-elles correctes pour tout langage $L \subseteq A^*$? Justifier les réponses.

1. $\{w^i \mid i \geq 0 \text{ et } w \in L\} \subseteq L^*$
2. $\{w^i \mid i \geq 0 \text{ et } w \in L\} = L^*$
3. $\{w^i \mid i \geq 0 \text{ et } w \in L^*\} = L^*$

Exercice 5: Construction d'Automates (1)
On fixe $A = \{a, b\}$ comme alphabet. Donnez un automate et une expression régulière pour chacun des langages suivants :

1. L_1 : Les mots commençant par 'a' dont le préfixe de longueur deux est répété plus loin dans le mot (attention : ces deux occurrences peuvent se chevaucher). Par exemple $\mathbf{ab}baa\mathbf{ab}ab \in L_1$, $\mathbf{aaa} \in L_1$, mais $\mathbf{ab}bba \notin L_1$.
2. L_2 : Les mots pour lesquels les nombres de 'a' ét de 'b' ont la même parité (c'est-à-dire, ils sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs).
3. L_3 : Les mots pour lesquels il y a au moins un 'b' et le nombre de 'a' n'est pas un multiple de 3.

Exercice 6: Construction d'Automates (2)
On fixe $A = \{a, b, c\}$ comme alphabet. Donnez un automate et une expression régulière pour le langage des mots pour lesquels entre deux 'c' consécutifs :

— soit il n'y a aucun 'b' et le nombre de 'a' est pair.

— soit il y a au moins un 'b' et le nombre de 'a' n'est pas un multiple de 3.

Exercice 7: Mélange de langages
Pour toute paire de mots (u, v), on appelle *mélange* de u et v le *langage* $u \sqcup\!\sqcup v$ défini comme suit :

$$u \sqcup\!\sqcup v = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_n v_n \mid n \in \mathbb{N},\ u = u_1 \cdots u_n \text{ et } v = v_1 \cdots v_n\}$$

où les u_i et les v_i sont des mots (*éventuellement vides*. Par exemple,

$$ab \sqcup\!\sqcup cd = \{abcd, acbd, cabd, acdb, cadb, cdab\}.$$

Pour deux langages L, K, leur mélange est le langage $L \sqcup\!\sqcup K$ suivant :

$$L \sqcup\!\sqcup K = \{w \mid w = u \sqcup\!\sqcup v \text{ avec } u \in L \text{ et } v \in K\}.$$

1. Donner une expression rationnelle du langage $(ab)^* \sqcup\!\sqcup \{c\}$.
2. Montrer que si L, K sont reconnus par deux automates, alors on peut aussi construire un automate qui reconnait le langage $L \sqcup\!\sqcup K$.

Exercice 8: Conjugués ♠

Soit A un alphabet. Deux mots w_1, w_2 sont *conjugués* s'il existe deux mots $u, v \in A^*$ tels que $w_1 = u \cdot v$ et $w_2 = v \cdot u$. Par exemple ab, ba sont conjugués avec $u = a$ et $v = b$.

Si w est un mot on note $C(w)$ le langage des conjugués de w. De même si L est un langage, on note $C(L) = \bigcup_{w \in L} C(w)$, l'ensemble des conjugués de mots de L.

1. Donner $C(abab)$, $C(a^*b^*)$ et $C(\{a^n b^n \mid n \geq 0\})$.
2. Montrer que si L est reconnu par un automate on peut construire un automate qui reconnait $C(L)$.