TD 5 - Résiduels et minimisation des automates

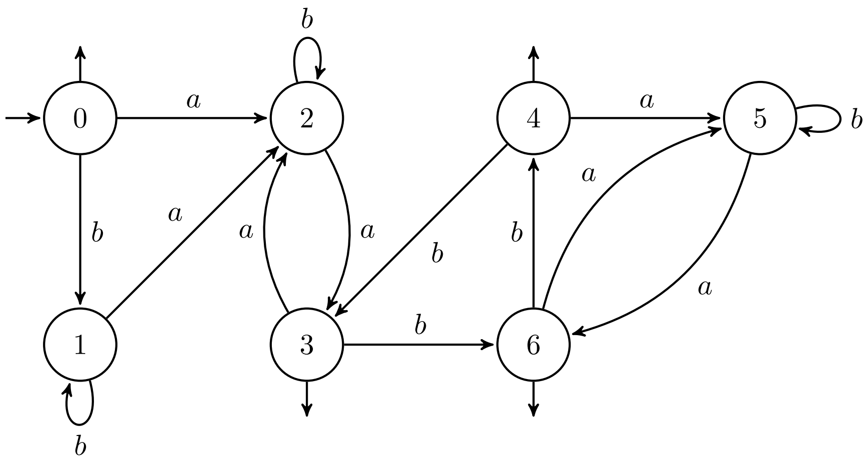
Licence 3 - Université de Bordeaux

Exercice 1: Résiduels d'un language et automate des résiduels

1. Calculer les résiduels des languages suivants
   — $L_1 = a^*b^*$,
   — $L_2 = a^*b + b^*a$
2. Pour chacun des languages ci-dessus construire l'automate minimal qui reconnait ce language. Vous pouvez répondre à cette question en construisant l'automate des résiduels.

Exercice 2: Minimisation

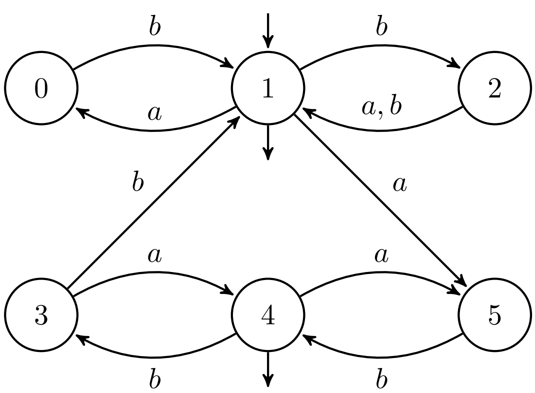
Minimiser l'automate suivant, et donner les résiduels du langage accepté.

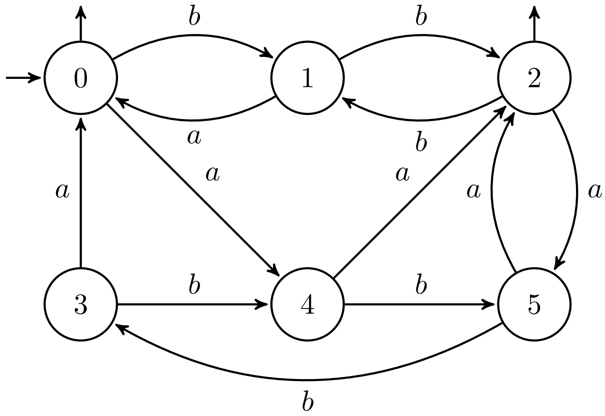


Exercice 3: Comparer des expressions rationnelles et des automates

Parmi les expressions rationnelles et les automates suivants dire quels sont les automates et les expressions rationnelles qui représentent le même language.

— $(ab^*a + b(a + b))^*$
— $(ab + b(a + b))^*$





Exercice 4

Un mot w est un palindrome s'il est égal à son miroir. Exemples : $b, aba, baab$ sont des palindromes, et ab, baa ne le sont pas.

On va montrer que le langage PAL des palindromes n'est pas régulier, dès que l'alphabet a au moins deux lettres (disons a, b).

1. Déterminer la forme des mots appartenant à $L := PAL \cap a^*ba^*$.
2. Montrer que L n'est pas régulier. Vous pouvez soit utiliser les résiduels, ou le lemme de pompage.
3. Déduire que PAL n'est pas régulier.

Exercice 5: Déterminisme contre non-determinisme

1. Donnez un automate fini non déterministe avec n états pour le language
$$L_n = (a+b)^*a(a+b)^{n-2}$$
2. Montrez que tout automate fini déterministe reconnaissant L_n possède au moins 2^{n-1} états.

Exercice 6: Le jeu du barman aveugle

Le jeu du barman aveugle consiste à poser quatre verres en cercle sur un plateau. Les verres peuvent être retournés ou non. Le but du barman est de s'arranger pour que tous les verres soient dans le même sens, mais sans les voir. Le but de son adversaire est qu'il n'y arrive pas. Le jeu se joue par tours. Un tour s'organise comme suit :

— Le barman retourne un ou deux verres de son choix. Pour qu'il ne récupère pas d'information en les touchant on lui met des gants de boxe ;

— L'adversaire fait faire un nombre quelconque de quarts de tours au plateau.

Si le barman place les verres dans le même sens, le jeu s'arrête.

On appelle configuration du plateau à un instant donné la position des verres à cet instant. En numérotant les verres dans l'ordre, on peut représenter une configuration par (haut,bas,bas,haut).

1. En remarquant que pour le barman, les configurations obtenues par rotation du plateau sont équivalentes (i.e. $\forall a, b, c, d$ (a, b, c, d), (b, c, d, a), (c, d, a, b) et (d, a, b, c) sont équivalents) montrer qu'il y a quatre configurations possibles du plateau et qu'il y a trois actions possibles pour le barman.
2. Représenter les exécutions possibles du jeu par un automate non déterministe.

3. Déterminiser l'automate.
4. En remarquant qu'obtenir une stratégie gagnante pour le barman revient à trouver une série d'actions qui, quelle que soit la configuration de départ, passe par un état final, aider le barman à gagner.

Exercice 7: Exercice plus difficile et recommandé en travail personnel : algorithme de minimisation de Brzozowski

Soit $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, I, F)$ un NFA sans transitions ε. Le langage à gauche $L_g^{\mathcal{A}}(q)$ de l'état $q \in Q$ est le langage accepté par l'automate $\mathcal{A}_g(q) = (Q, A, \delta, I, q)$. Le langage à droite $L_d^{\mathcal{A}}(q)$ de l'état $q \in Q$ est le langage accepté par l'automate $\mathcal{A}_d(q) = (Q, A, \delta, q, F)$.

Soit $d(\mathcal{A})$ l'automate des sous-ensembles associé à $\mathcal{A}$ (en ne gardant que les états accessibles). Soit $r(\mathcal{A})$ l'automate miroir associé à $\mathcal{A}$ (obtenu en renversant les flèches et en échangeant I et F).

1. Montrer que $r(\mathcal{A})$ reconnaît les miroirs de mots dans $\mathcal{L}(\mathcal{A})$: $\mathcal{L}(r(\mathcal{A})) = \mathcal{L}(\mathcal{A})^R$.
2. Montrer que le langage à gauche $L_g^{r(\mathcal{A})}(q)$ de l'état q dans $r(\mathcal{A})$ est le miroir du langage à droite $L_d^{\mathcal{A}}(q)$ de q dans $\mathcal{A}$. (Pareil pour gauche et droite inversés.)
3. Montrer que chaque langage à droite $L_d^{d(\mathcal{A})}(R)$ associé à un état R de $d(\mathcal{A})$ est l'union des langages à droite $L_d^{\mathcal{A}}(r)$, où $r \in R$.
4. Montrer que $\mathcal{A}$ est déterministe si et seulement si les langages à gauche associés à ses états sont deux à deux disjoints et $|I| = 1$.
5. Montrer qu'un automate déterministe complet, dont tous les états sont accessibles, est minimal si et seuelement si les langages à droite associés à ses états sont deux à deux différents.
6. Montrer que $d(r(d(r(\mathcal{A}))))$ est l'automate minimal de $\mathcal{A}$.