TD6 - Grammaires hors-contexte

Licence 3 - Université de Bordeaux

Exercice 1

On considère ici les expressions arithmétiques qu'on peut construire à l'aide des lettres x, y, z et des symboles arithmétiques $+$, $-$, $*$, $/$.

1. Donner un automate reconnaissant l'ensemble A_0 des expressions arithmétiques correctes sans parenthèse. Par exemple, $x + y * z - x$ est une expression correcte sans parenthèse.
2. On désigne par A_1 l'ensemble des expressions arithmétiques correctes contenant au plus un niveau de parenthèses. Par exemple, $x+y*z-x$, $x*(y-z)*y+x$ et $x*(y-z)*(y+x)$ sont des expressions arithmétiques correctes de A_1, mais $x * (y - (x + z))$ n'est pas dans A_1.

   Donner un automate reconnaissant le langage A_1.
3. On désigne par A_2 l'ensemble des expressions arithmétiques correctes contenant au plus deux niveaux de parenthèses. Par exemple, les expressions $x + y * z - x$, $x * (y - z) * y + x$ et $x * ((y - z) * y + x)$ sont des mots de A_2.

   Donner un automate reconnaissant A_2.
4. De même pour A_n, n quelconque.
5. Peut-on en déduire que le langage $\cup_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \cup A_1 \cup \ldots$ est régulier ?

Exercice 2

Parmi les langages suivants, lesquels sont réguliers (justifiez dans chaque cas) ? Si la réponse est non, donnez, si vous pouvez, une grammaire hors-contexte qui génère le langage.

1. Les mots comportant exactement 42 occurrences de a et 42 occurrences de b.
2. $L_1 = \{a^{2n} b^n \mid n \geq 0\}$
3. $L_2 = \{a^{p+q} b^p c^q \mid p, q \geq 0\}$
4. L'ensemble L_3 des mots dont la longueur est un multiple de 2^{64}.
5. $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 2^k, k \geq 0\}$

Exercice 3

Soit $A = \{a, b\}$ et $L = \{uu \mid u \in A^*\}$. On veut montrer dans cet exercice que le complémentaire de L est un langage hors-contexte.

Exemples : $b, abba \notin L$, $abab, aa \in L$.

1. Montrez pour tout mot $w \in A^*$: $w \notin L$ si et seulement si (1) soit $|w|$ impair ou (2) w peut s'écrire comme $w = xaybz$ ou $w = xbyaz$, où $x, y, z \in A^*$ sont tels que $|xz| = |y|$.
2. Soit L_a le langage des mots de longueur impaire dont la lettre au milieu est a. Le langage L_b est défini de manière analogue.

   Donnez des grammaires hors-contexte pour L_a et L_b.
3. Montrez pour tout mot $w \in A^*$ de longueur paire : $w \notin L$ si et seulement si $w \in L_aL_b \cup L_bL_a$.
4. Déduisez que le complémentaire de L est un langage hors-contexte.

Exercice 4

1. Un mot u de $\{a, b\}^*$ est dit *super équilibré* si, pour tout préfixe v de u, la différence $|v|_a - |v|_b$ vaut 0, 1 ou -1. Par exemple, *abbab* est super équilibré, mais *abaab* ne l'est pas (le préfixe *abaa* comporte trop de a).

   L'ensemble des mots super équilibrés est-il un langage régulier ?
2. Un mot u de $\{a, b\}^*$ est dit *équilibré* si $|u|_a = |u|_b$.

   Montrez que chaque mot équilibré u non-vide a une des formes suivantes :
   - $u = vw$, où v, w sont deux mots équilibrés non-vides
   - $u = avb$ ou $u = bva$, où v est un mot équilibré.
3. Donnez une grammaire hors-contexte pour l'ensemble des mots équilibrés, et justifiez sa validité.

Exercice 5

Donnez des grammaires hors-contexte pour les langages suivants (et justifiez la validité de la grammaire) :

1. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a > |w|_b\}$
2. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$

Exercice 6

Soit $G = (\{S\}, \{a, b\}, R, S)$ la grammaire avec règles

$$R : \quad S \to aS \ \mid \ S \to aSbS \ \mid \ S \to \varepsilon$$

Montrez que $L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid |v|_a \geq |v|_b \text{ pour chaque préfixe } v \text{ de } w\}$.

Exercice 7

Etant donnée une grammaire hors-contexte $G = (V, A, R, S)$, construisez une grammaire hors-contexte qui génère les miroirs des mots générés par G :

$$(a_0 \dots a_n)^{\text{rev}} = a_n \dots a_0$$

Exercice 8

Construisez des grammaires hors-contexte pour les langages suivants (et justifiez la validité de la grammaire) :

1. $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
2. $\{a^p b^q c^r \mid p = q \text{ ou } q = r\}$
3. $\{v\#w \mid v^{\text{rev}} \text{ est facteur de } w\}$

Exercice 9

Montrer que les langages hors-contexte ne sont pas clos par intersection (on pourra s'inspirer de l'exercice précédent).

Exercice 10

Soit $L \subseteq A^*$ un langage. Le langage de ses préfixes est :

$$\text{Pref}(L) = \{u \in A^* \mid uv \in L \text{ pour un } v \in A^*\}$$

— Si $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, déterminez $\text{Pref}(L)$.
— Montrez : si L est hors-contexte, alors $\text{Pref}(L)$ l'est aussi.